

DM 1
ÉQUATIONS, INÉGALITÉS,
ENSEMBLES

À rendre lundi 15 septembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

1. Soit a un nombre réel fixé.

En distinguant plusieurs cas suivant les valeurs de a , résoudre l'équation d'inconnue x réelle suivante :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = a$$

2. Soit m un nombre réel fixé.

En distinguant plusieurs cas suivant les valeurs de m , résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle suivante :

$$\frac{3x-2}{m-3} + \frac{2m}{9} < 2x$$

3. (a) Montrer que pour tous a et b éléments de \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- (b) En déduire que pour tous réels x et y on a :

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

Exercice 2

Soit \mathcal{S} l'ensemble des applications f de \mathbb{N} vers \mathbb{N} qui vérifient :

quel que soient les entiers naturels m et n , $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

Démontrer que \mathcal{S} est l'ensemble des applications f telles qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que :

quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.

Exercice 3

Soit E un ensemble, et A , B et D des parties de E .

Montrer l'inclusion suivante :

$$(A \cup B) \setminus (A \cup D) \subset A \cup (B \setminus D)$$