DM 10
STRUCTURES ALGÉBRIQUES, ARITHMÉTIQUE, POLYNÔMES

À rendre lundi 23 février

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
   Cette bijection réciproque de th se note argth et elle est appelée ***argument tangente hyperbolique***.
2. Écrire la relation de trigonométrie hyperbolique (pour a et b réels) :
$$\operatorname{th}(a+b) = \dots$$
3. Soit $(x,y) \in]-1,1[^2$. Déduire de la question précédente une simplification de l'expression $\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x) + \operatorname{argth}(y))$.
4. Montrer que la loi $*$ définie par :
$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$
   est interne dans $]-1,1[$.
5. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, que remarque-t-on concernant $\operatorname{th}(a+b)$?
6. En déduire que $(]-1,1[,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2

Pour tout couple (a,b) d'entiers relatifs non nuls, on note $d(a,b)$, le plus grand dénominateur commun de a et b, et $m(a,b)$ le plus petit multiple commun de a et b.

1. Montrer que d définit une loi de composition interne associative sur $\mathbb{Z}^*$.
2. Cette loi admet-elle un neutre ?
3. Soit $a,b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $d(a,b) = d(a,a+b)$.
4. Soit $a,b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $\dfrac{m(a,b)}{a}$ et $\dfrac{m(a,b)}{b}$ sont premiers entre eux.

Exercice 3

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, tels que $m > n$.

1. Écrire la division euclidienne de m par n.
2. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, factoriser le polynôme $X^{nq} - 1$ par $X^n - 1$.
3. Déduire des questions 1 et 2 la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.
4. On note d le plus grand diviseur commun de m et n. Montrer que le plus grand diviseur commun de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ est $X^d - 1$.

Exercice 4

On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
2. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est $\mathbb{U}_4$.
3. Pour α et β éléments de $\mathbb{Z}[i]$, on dira que β ***divise*** α ***dans*** $\mathbb{Z}[i]$ lorsqu'il existe $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha = \beta\gamma$. On note alors $\beta \mid \alpha$.

   La relation $\mid$ est-elle réflexive ? transitive ? antisymétrique ?