DM 13
INTÉGRATION

À rendre lundi 27 avril

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice

Soit I l'intervalle $[-1,1]$.
Soit $f \in \mathbb{R}^I$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in I \setminus \{0\}, \quad f(x) = x \int\limits_1^{2x^2} \frac{\arctan \sqrt{t}}{4t} dt \end{cases}$$

1. Vérifier que ces formules définissent bien une application de I vers $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit $x \in]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0[\cup]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}[$. Justifier que :

$$\forall t \in [2x^2, 1], \quad \frac{\arctan \sqrt{t}}{4t} \leqslant \frac{\pi}{16t}$$

   (b) En déduire que f est continue sur I.
3. Étudier la parité de f.
4. Pour tout $x \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, on pose : $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.
   (a) Montrer que h est croissante $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. (***On ne cherchera pas à dériver*** h).
   (b) Montrer que h est à valeurs négatives sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.
   (c) Montrer que quel que soit $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan u < u$. En déduire que h est minorée par $-\dfrac{1}{2}$ sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.
   (d) En déduire que f est dérivable en 0. (On ne cherchera pas à calculer $f'(0)$.)
5. Exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Problème

I

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues, non identiquement nulles.
On se propose d'étudier l'application

$$F : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int\limits_0^1 f(xu)g(u)du \end{array}$$

On dira que $\int_0^1 f(xu)g(u)du$ est une intégrale à paramètre x.

1. Justifier que F est bien une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note I l'intervalle $[-|x_0| - 1, |x_0| + 1]$. On considère, quel que soit $h \in [-1, 1]$, le réel positif

$$\Delta_h = \int_0^1 |f(x_0u + hu) - f(x_0u)|du$$

   i. Vérifier que :
$$\forall h \in [-1, 1], \quad \forall u \in [0, 1], \quad (x_0u, x_0u + hu) \in I^2$$

   ii. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   À l'aide du théorème de Heine, démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall h \in [-\alpha, \alpha], \quad \Delta_h \leqslant \varepsilon$$

   (b) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose en outre dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note I l'intervalle $[-|x_0| - 1, |x_0| + 1]$. On note :
$$M_2 = \sup_I |f^{(2)}|, \quad \text{et} \quad M = \sup_{[0,1]} |g|$$

   i. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer :
$$\forall h \in [-1, 1], \quad \left| F(x_0 + h) - F(x_0) - h \int_0^1 uf'(x_0u)g(u)du \right| \leqslant \frac{h^2 M M_2}{6}$$

   ii. En déduire que F est dérivable en x_0 ainsi qu'une expression de $F'(x_0)$.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dans cette question, on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   En faisant un raisonnement par récurrence, établir que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{(p)}(x) = \int_0^1 u^p f^{(p)}(xu)g(u)du$$

II

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On considère l'application h_2 de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h_2(x) = \frac{h(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0)}{x^3}$$

1. Montrer que h_2 est prolongeable par continuité en 0, et préciser son prolongement par continuité, qu'on notera φ_2 jusqu'à la fin de la partie **II**.
2. Dans cette question, on cherche à montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^2 h^{(3)}(xu) du$$

   (a) Montrer la relation $(*)$ pour $x = 0$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à h entre 0 et x.

   (c) En déduire la relation $(*)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

3. Justifier que φ_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Grâce à des intégrations par parties, calculer $\int_0^1 u^p (1-u)^2 \, du$ en fonction de p.

   (b) Donner, pour tout entier p, une expression simple de $\varphi_2^{(p)}(0)$ en fonction d'une des dérivées successives de h en 0, et de p.

5. Confirmer l'expression ainsi trouvée en utilisant les développements limités.