DM 2
TRIGONOMÉTRIE, NOMBRES COMPLEXES

À rendre lundi 29 septembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tesl que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. Montrer que :
$$1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$
2. On suppose de plus que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier :
$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Problème

Partie I

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 0, -1\}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0, -1\}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$$

1. Étudier la parité de φ.
2. Étudier les variations de φ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution α, avec $\alpha > 1$.

Partie II

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}$ par :
$$\forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}, \quad t(z) = \frac{1}{z \ln|z|}$$

On note $D_t = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ d'affixe z pour z décrivant D_t. On note E cet ensemble.

   Soit $\mathcal{T}$ la fonction qui à tout point M d'affixe z de E associe le point M' d'affixe $t(z)$ de $\mathcal{P}$.

2. Soit $z \in D_t$. Exprimer le module et les arguments de $t(z)$ au moyen de ceux de z.
3. En utilisant la partie **I**, Montrer qu'il y a exactement deux points M de E tels que $M' = M$, et préciser lesquels.
4. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que O, M et $M' = \mathcal{T}(M)$ soient alignés.
5. Soit $R > 0$, avec $R \neq 1$. Notons Γ le cercle de centre O et de rayon R. On note Γ' le cercle de centre O et de rayon $\varphi(R)$. Pour M un point de E, montrer que :

$$M \in \Gamma \iff M' \in \Gamma'$$