DM 3
LOGIQUE, ENSEMBLES, APPLICATIONS

À rendre lundi 13 octobre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

On considère l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leq \varepsilon$$

1. Écrire la négation de cet énoncé.
2. Soit l'assertion $\mathcal{A}$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

   Démontrer $\mathcal{A}$ en utilisant une contraposée.

Exercice 2

Soit E, F et G des ensembles, f une application de E vers F, et g une application de F vers G. Soit $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si h est injective, et f surjective, alors g est injective.

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}, \quad f(z) = \frac{2z}{z - 2i}$$

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $2i$, et B le point d'affixe 2.

Soit $\mathcal{F}$ l'application de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ vers $\mathcal{P}$ qui à un point M d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)$.

1. Déterminer l'ensemble $\widehat{f^{-1}}(\mathbb{R})$.
2. f est-elle surjective ?

3. (a) Démontrer que f induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. On notera g cette application.
   (b) Donner la réciproque g^{-1} de g.
4. Déterminer le point $\mathcal{F}(B)$.
5. Soit Δ la médiatrice de $[OA]$. Démontrer que $\mathcal{F}\langle\Delta\rangle$ est un cercle $\mathcal{C}$ privé d'un point. On précisera le cercle $\mathcal{C}$ et le point.
6. (a) Soit M un point du plan, avec $M \neq O$ et $M \neq A$. Justifier que :

$$\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}}) = \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}})\,[2\pi]$$

   où $M' = \mathcal{F}(M)$.
   (b) Soit Γ le cercle de diamètre $[OA]$ privé du point A. Montrer que $\mathcal{F}\langle\Gamma\rangle$ est une droite $\mathcal{D}$ que l'on précisera.

Exercice 4

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x - y + z)$$

1. f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Que vaut $f\langle\mathbb{R}^3\rangle$?