DM 4
APPLICATIONS, FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$

À rendre lundi 3 novembre

Exercice 1

Soit E, F, G des ensembles, et g une application de F dans G. On définit l'application ψ suivante :

$$\psi : \begin{array}{c} F^E \to G^E \\ f \mapsto g \circ f \end{array}$$

1. Montrer que si g est injective, alors ψ est injective.
2. (a) Soit $a \in F$. On note δ_a l'application de E vers F constante égale à a. Que vaut $(g \circ \delta_a)(x)$ pour $x \in E$?
   (b) Montrer que si ψ est injective, alors g est injective.
3. Que peut-on déduire des questions précédentes ?
4. Dans cette question on suppose que ψ est surjective.
   (a) Pour $b \in G$, on note Δ_b l'application de E vers G, constante égale à b. Que signifie la condition $\psi(f) = \Delta_b$?
   (b) Montrer que g est surjective.

Exercice 2

Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Étudier les variations de f ainsi que les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Préciser la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Démontrer que f induit une bijection h de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. En considérant $\dfrac{1}{y}$, exprimer $h^{-1}(y)$.
5. On note sh l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

(a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 + (\mathrm{sh}(t))^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$$

(c) Simplifier l'application $h \circ \mathrm{sh}$.

(d) Retrouver le fait que h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) Que peut-on dire de l'application $\ln \circ h$?

<u>*Exercice 3*</u>

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{3z - 5}{z + 1}$$

1. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à déterminer.
   <u>On notera g cette bijection</u>. Déterminer g^{-1}.
2. Montrer que $f\langle \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rangle \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
3. Soit a et b des nombres complexes, et $k \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ on a :
   $$|z - a|^2 = k^2 |z - b|^2 \iff |z - u|^2 = R^2$$
   où $u = \dfrac{a - k^2 b}{1 - k^2}$ et $R = \dfrac{k}{1 - k^2}\,|a - b|$.
   (b) Montrer que $|b - u| \neq R$.
4. On dit qu'un nombre complexe z est un *point fixe* de f lorsque $f(z) = z$.
   Déterminer les points fixes de f. On notera z_1 celui dont la partie imaginaire est strictement positive, et z_2 l'autre.
5. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq z_2$. Exprimer $\dfrac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2}$ en fonction de $\dfrac{z - z_1}{z - z_2}$.
6. Soit $k \in]0, 1[$. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
   $$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k$$
   est un cercle (noté $\mathcal{C}_k$).
7. Soit z un nombre complexe. Montrer que $|z - z_1| = |z - z_2|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
8. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ..., $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
   Soit z un nombre complexe non réel, et tel que $z \neq z_1$ et $z \neq z_2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que les points d'affixe $z, f(z), f^2(z), \ldots, f^n(z)$ sont sur un même cercle.