MPSI 2014/2015

DM 6
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, CALCUL INTÉGRAL

À rendre Lundi 1^{er} décembre

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$\operatorname{sh}(x)y' + \operatorname{ch}(x)y = \arctan(x)$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

   (a) Montrer que $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{\operatorname{sh}(x)} = 0$.

   (b) Montrer que $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{1}{2}$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$$

et

$$V_n = (n+1)I_n I_{n+1}$$

1. (a) En faisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$.

   (b) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (d) Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Montrer :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à la question précédente, montrer :

$$\forall u \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effecteur le changement de variable $u = \sqrt{n}\sin(t)$ dans l'intégrale I_{2n+1}.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effecteur le changement de variable $u = \sqrt{n}\tan(t)$ dans l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} du$$

(e) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

(f) En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$