

DM 7
NOMBRES RÉELS ET SUITES

À rendre Lundi 15 décembre

Exercice 1

Soit A et B deux parties de \mathbb{R} non vides telles que :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \quad x \leq y$$

1. Démontrer que A admet une borne supérieure α , que B admet une borne inférieure β , et que $\alpha \leq \beta$.
2. Montrer que :

$$\alpha = \beta \iff \forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A \times B, \quad |x - y| < \varepsilon$$

(on dit alors que les ensembles A et B sont adjacents).

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $0 < u_0 \leq 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l tel que $0 \leq l \leq 1$.
2. Justifier que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, $l > 0$.