MPSI 2014/2015

DM 8
NOMBRES RÉELS ET SUITES

À rendre lundi 5 janvier

<u>*Exercice*</u> *Développements asymptotiques*

I Un exemple de développement asymptotique à l'ordre 4

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$$

On cherche à montrer qu'il existe des nombres réels a, b, c, d, e tels qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On dit alors que u admet ***un développement asymptotique à l'ordre*** 4.

1. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq 2$$
2. Montrer que u converge vers 1.
3. Soit $v = (v_n)_{n\geq 6}$ définie pour tout entier $n \geq 6$ par :
$$v_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-5} k! = \frac{1! + 2! + \ldots + (n-5)!}{n!}$$
   (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
   (b) Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 4 des suites $(x_n)_n$ suivantes.
      i. Pour n entier tel que $n \geq 2$, on pose : $x_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$
         A. Déterminer une suite $(a_n)_{n\geq 2}$ d'expression simple telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.
         B. Déterminer une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ d'expression simple telle que $x_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
         C. Déterminer une suite $(c_n)_{n\geq 2}$ d'expression simple telle que $x_n - a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$.
         D. Déterminer une suite simple, équivalente à $(c_n)_{n\geq 2}$.

E. En déduire que $(x_n)_{n\geq 2}$ admet le développement asymptotique à l'ordre 4 suivant :

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

ii. En appliquant la méthode décrite pour la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de la question précédente, déterminer le développement asymptotique à l'ordre 4 de la suite $\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\right)_{n\geq 3}$.

iii. De la même façon, déterminer le développement asymptotique à l'ordre 4 de la suite $\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right)_{n\geq 4}$

(c) Montrer que u admet un développement asymptotique sous la forme souhaitée, et déterminer les réels a, b, c, d, e.

II Un exemple de développement asymptotique à l'ordre 1

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

1. Montrer :
$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+y) \leq y$$
2. Pour n entier, encadrer $1 - I_n$ et en déduire que
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1$$
3. Pour n entier, intégrer $1 - I_n$ par parties.
4. En utilisant la question 1., en déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour développement asymptotique à l'ordre 1 :
$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Problème

Partie I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0 \quad \text{et} \quad b_n > 0$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n - u_n| \leq \varepsilon u_n)$$

2. Montrer que soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l > 0$, soit divergente vers $+\infty$.
3. On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Montrer grâce à la question 1, que si $(A_n)_n$ diverge vers $+\infty$, alors $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

   On a ainsi montré que : **Si** $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ **et si** $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$**, alors** $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$
4. Appliquer le résultat à la suite de terme général $(\ln(n+1)-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, en déduire un équivalent simple de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie II

Soit x un réel fixé. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = x$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que si $x > 0$, la suite u est à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que si $x > 0$, la suite u est strictement décroissante.
3. Montrer que si u converge vers un réel l, alors $l = 0$.
4. Montrer que la suite u converge si et seulement si $x \geq 0$.

   On suppose désormais que $x > 0$
5. Démontrer que la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
6. En déduire, grâce au résultat de la partie I, que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

   On admet le résultat suivant : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite qui converge vers** 0**, alors on a :** $e^{x_n} = 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(x_n^2\right)$
7. Montrer que :
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$
8. (a) Montrer que $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$e^x > x + 1$$

   (b) Grâce au résultat de la partie I, en déduire :
$$\frac{1}{u_n} = n + \frac{\ln(n)}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$$
9. En déduire :
$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{2n^2}$$