DM 9
 CONTINUITÉ ET DÉRIVATION

À rendre lundi 26 février

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
 Démontrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$ et $f(c_2) = 0$.

Exercice 2

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $a < b$.

On suppose :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) \geq 0, \quad g''(x) \leq 0$$

et qu'il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que :

$$g(\gamma) = 0$$

Montrer que g est identiquement nulle.

Problème

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant la condition (*) suivante :

$$(*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Le but du problème est de décrire l'ensemble $\mathcal{E}$ explicitement.

(A) Dans cette partie, on souhaite montrer que la seule application f de $\mathcal{E}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ est l'application identiquement nulle. On le fera par deux méthodes différentes.

On considère une application f de $\mathcal{E}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -périodique.

2. 1^{ère} méthode.

(a) Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(2x)}{2}$$

(c) Montrer que pour une application h de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, bornée, on a :

$$\sup_{[0,1]} h = \sup_{x \in [0,1/2]} h(2x) \quad \text{et} \quad \inf_{[0,1]} h = \inf_{x \in [0,1/2]} h(2x)$$

(d) En déduire que $M = 2M$ et que $m = 2m$.

(e) Conclure.

3. **2^{ème} méthode.**

(a) Montrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall p \in \{0, 1, \dots, 2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$$

(b) On note D l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ tels que $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, où n décrit $\mathbb{N}$.

Montrer que D est dense dans $[0, 1]$.

(c) Conclure.

4. Conclure.

(B) Dans cette partie, on souhaite montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des applications affines.

1. Montrer que si g est une application affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors $g \in \mathcal{E}$.

2. Montrer que si $h \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathcal{E}$, alors $h - k \in \mathcal{E}$.

3. Étant donné $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe une unique application affine g telle que $g(0) = \alpha$ et $g(1) = \beta$.

4. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que f est affine.

5. Conclure.