DM 1
SOMMES, INEGALITÉS, NOMBRES COMPLEXES

À rendre lundi 21 septembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit m un paramètre réel fixé. Résoudre, suivant les valeurs du paramètre m, l'inéquation d'inconnue x réelle suivante :

$$\frac{m}{x-3} > \frac{2}{x+1}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. On définit :

$$A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \sum_{k \in I_n} \binom{n}{3k}$$

où

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, 3k \leq n\}$$

$$B_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \ldots = \sum_{k \in J_n} \binom{n}{3k+1}$$

où

$$J_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, 3k+1 \leq n\}$$

et

$$C_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \ldots = \sum_{k \in L_n} \binom{n}{3k+2}$$

où

$$L_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, 3k+2 \leq n\}$$

On note j le nombre complexe $e^{i2\pi/3}$.

1. Que vaut j^3 ?
2. Justifier que $j^2 = \bar{j}$.
3. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.

4. Que vaut j^{3k} pour $k \in \mathbb{N}$?
5. Que vaut j^{3k+1} pour $k \in \mathbb{N}$?
6. Que vaut j^{3k+2} pour $k \in N$?
7. Exprimer (on devra trouver une expression simple) $A_n + B_n + C_n$ en fonction de n.
8. Mettre les nombres complexes $1 + j$ et $1 + j^2$ sous forme exponentielle.
9. Montrer que $A_n + jB_n + j^2 C_n = e^{in\pi/3}$
10. Montrer que $A_n + j^2 B_n + jC_n = e^{-in\pi/3}$.
11. En déduire que

$$A_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$B_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{(n+4)\pi}{3}\right)\right)$$

et

$$C_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{3}\right)\right)$$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On rappelle que pour x et y des nombres réels, $\min(x, y)$ désigne le plus petit élément de l'ensemble $\{x, y\}$.

Calculer l'expression de la somme S_n suivante en fonction de n :

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)$$