MPSI 2015/2016

DM 2
NOMBRES COMPLEXES

À rendre lundi 5 octobre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des entiers pairs compris entre 0 et n, et $\mathcal{I}_n$ désigne l'ensemble des entiers impairs compris entre 0 et n.

On associe à chaque paramètre complexe $a \neq 0$ deux équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, notées $E_0(n,a)$ et $E_1(n,a)$.

$$E_0(n,a) : \qquad \sum_{k \in \mathcal{P}_n} \binom{n}{k} z^k a^{n-k} = 0$$

$$E_1(n,a) : \qquad \sum_{k \in \mathcal{I}_n} \binom{n}{k} z^k a^{n-k} = 0$$

1. (a) On suppose que $n = 2$. Former les équations $E_0(n,a)$ et $E_1(n,a)$, et déterminer l'ensemble des solutions pour chacune d'entre elles.
   (b) On suppose que $n = 3$. Former les équations $E_0(n,a)$ et $E_1(n,a)$, et déterminer l'ensemble des solutions pour chacune d'entre elles.
   (c) On suppose que $n = 4$. Former les équations $E_0(n,a)$ et $E_1(n,a)$, et déterminer l'ensemble des solutions pour chacune d'entre elles.
2. (a) Étant donné un paramètre complexe w, on considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{a+z}{a-z} = w$$

   Discuter suivant les valeurs du paramètre w et donner dans chaque cas l'ensemble des solutions de l'équation.

   (b) Pour α réel et $w = e^{i\alpha}$, simplifier l'expression

$$\frac{w-1}{w+1}$$

   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue z complexe :

$$\left(\frac{a+z}{a-z}\right)^n = -1$$

   On distinguera les cas n pair et n impair, et on exprimera chacune des solutions sous forme d'un imaginaire pur.

(d) Pour $z \in \mathbb{C}$, transformer l'expression $(z+a)^n + (-z+a)^n$, et en déduire la résolution de l'équation $E_0(n,a)$.

<u>Exercice 2</u>

Soit α un nombre réel, et n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Simplifier la somme S_n suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$$

<u>Exercice 3</u>

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Soit $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les éléments de $\mathbb{U}_n$, et, pour chaque $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, soit A_k le point de $\mathcal{P}$ d'affixe z_k.

1. Que peut-on dire de $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$?
2. Interpréter ce résultat comme une égalité vectorielle.
3. En déduire l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} \right\| = n$$