DM 3
APPLICATIONS

À rendre lundi 2 novembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit E, F et G des ensembles, f une application de E vers F, et g une application de F vers G. Soit $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est surjective de E sur G et g injective, alors f est surjective de E sur F.
2. Montrer que si h est injective, et f surjective de E sur F, alors g est injective.

Exercice 2

Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec des quantificateurs), et les démontrer :

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
2. Tout nombre complexe est le carré d'un nombre complexe.
3. L'application inverse n'est pas minorée sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 3

Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(3x) + 3\sin(x) \end{array}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan, qui est muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer $f(\pi - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?
2. On note Γ la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer qu'il suffit de tracer Γ pour obtenir $\mathcal{C}_f$, et expliquer comment.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et factoriser l'expression obtenue.
4. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $I = [0, \dfrac{\pi}{2}]$.
5. Déterminer l'ensemble $f\langle I \rangle$, en démontrant soigneusement votre réponse.

6. (a) Démontrer que f induit une bijection g de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle J à déterminer.
   On notera φ la réciproque de g.
   (b) Justifier que φ est continue sur J.
   (c) Étudier la dérivabilité de φ sur J.
   (d) Lorsque $\varphi'(x)$ existe, exprimer $\varphi'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$.
7. Déterminer $\widehat{f}^{-1}(\{0\})$.
8. (a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   (b) Déterminer, en démontrant votre réponse, $[0, \frac{\pi}{2}] \cap \widehat{f}^{-1}([0, \frac{5}{2}])$.
   (c) Déterminer, en justifiant votre réponse, $[0, \pi] \cap \widehat{f}^{-1}([0, \frac{5}{2}])$.
   (d) Déterminer, en justifiant votre réponse, $]-\pi, \pi] \cap \widehat{f}^{-1}([0, \frac{5}{2}])$.
   (e) Déterminer, en justifiant votre réponse, $\widehat{f}^{-1}([0, \frac{5}{2}])$.