

DM 4
FONCTIONS USUELLES

À rendre jeudi 12 novembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{th}(x)} + x$$

1. Déterminer I .
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On notera g cette bijection.
3. g est-elle dérivable sur I ?
4. Déterminer l'application dérivée g' de g .
5. Étudier la dérivabilité de la réciproque g^{-1} de g sur tout l'intervalle J .

Exercice 2

On considère l'équation (E) suivante d'inconnue x réelle :

$$\arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1], \exists ! a \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, x = \cos^2(a)$$

2. Montrer que, pour $a \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\arcsin(\cos(2a)) = \frac{\pi}{2} - 2a$.
3. Résoudre (E) en s'aidant des questions précédentes.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul m , on appelle \mathcal{C}_m l'ensemble des couples (x, y) de réels non nuls tels que :

$$m \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$$

1. Soit x , un réel non nul. On pose $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Déterminer le module du nombre complexe $z = x + i$.

(b) Exprimer une relation liant α aux arguments de z .

(c) Préciser, en fonction de x , les arguments de z . On distinguera les cas suivant le signe de x .

2. Montrer l'équivalence :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_m \iff (x + i)^m (y + i) e^{-i\pi/4} \in \mathbb{R}$$

3. Montrer :

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$