# DM 5
## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL INTÉGRAL

**À rendre lundi 30 novembre**

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

*Exercice 1*

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition (1) suivante :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos x$$

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition (2) suivante :

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = 0$$

1. Soit $f_1$ et $f_2$ deux éléments de $\mathcal{H}$, et $\lambda$ un réel quelconque. A-t-on $f_1+f_2 \in \mathcal{H}$ ? A-t-on $\lambda f_1 \in \mathcal{H}$ ? Justifiez.
2. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \qquad y'' + y = \cos x$$

$$(E_2) \qquad y'' - y = x$$

   (a) Résoudre $(E_1)$ et $(E_2)$.
   (b) Déterminer les solutions paires de $(E_1)$.
   (c) Montrer que $(E_1)$ n'a pas de solution impaire.
   (d) Montrer que $(E_2)$ n'admet pas de solution paire.
   (e) Démontrer que l'ensemble des solutions impaires de $(E_2)$ est :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x + \lambda \operatorname{sh} x \end{array} \; ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $u$ paire, et une unique application $v$ impaire, telles que $f = u + v$. (On devra faire apparaître les expressions de $u$ et de $v$ en fonction de $f$).
   On dira que $u$ est la partie paire de $f$, et que $v$ est la partie impaire de $f$.
4. Soit $f \in \mathcal{S}$. On note $u$ la partie paire de $f$, et $v$ sa partie impaire. Donner une équation différentielle dont $u$ est solution et une équation différentielle dont $v$ est solution. Justifier.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.

*Exercice 2*

Le but de l'exercice est de calculer de trois manières différentes l'intégrale $I$ suivante :

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1. Calculer $I$ grâce au changement de variable $x = \cos(\theta)$.
2. Calculer $I$ en effectuant une intégration par parties.
3. On considère

$$f : \begin{array}{c} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

   et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé du plan.

   (a) Remarquer que $\mathcal{C}$ est une courbe connue.

   (b) En déduire, grâce à des arguments géométriques, le calcul de $I$.