

DM 6
NOMBRES RÉELS ET SUITES

À rendre lundi 14 décembre

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit

$$A = \left\{ \left(\frac{m+n+1}{m+n} \right)^{m+n} ; (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n}$$

- (a) Grâce à une limite usuelle de cours, montrer que u converge vers e .
- (b) Écrire la définition de : u converge vers e .
- (c) Démontrer que e est la borne supérieure de A .

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel x :

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_p = \sum_{k=0}^p \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

- (a) Exprimer S_p en fonction de n et p .
- (b) Montrer que la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, et déterminer sa limite.