DM 7
SUITES

À rendre lundi 4 janvier

Soignez la présentation et justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \neq 1$ et $b \neq 1$.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$$

1. Montrer qu'il existe une constante réelle non nulle α (que l'on déterminera) telle que :
$$\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
2. Justifier que
$$\ln\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
3. Déduire des questions précédentes la limite de la suite u.

Exercice 2

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des suites réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du type suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

où, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in \mathbb{R}_+$.

I) Quelques résultats généraux

On considère deux suites réelles positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

1. Montrer que si $(S_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si elle est majorée.
3. On suppose dans cette question qu'il existe un rang à partir duquel on ait : $u_n \leqslant v_n$.
   (a) Justifier que si $(V_n)_n$ converge, alors $(S_n)_n$ converge aussi.
   (b) Justifier que si $(S_n)_n$ diverge, alors $(V_n)_n$ diverge aussi.
4. Dans cette question on suppose que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que $(S_n)_n$ converge si et seulement si $(V_n)_n$ converge.

II) Suites de référence

Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Dans cette question on suppose que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$
   (b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(n+1) \leqslant S_n$.
   (c) Justifier que $(S_n)_n$ diverge.
2. Dans cette question on suppose que $\alpha \leqslant 0$ et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$
   Montrer que $(S_n)_n$ diverge.
3. Dans cette question on suppose que $0 < \alpha < 1$ et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$
   Montrer que $(S_n)_n$ diverge.
4. On suppose que $\alpha > 1$, et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

(a) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

(b) En déduire que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1}$$

(c) En déduire que $(S_n)_n$ converge.

III) Étude d'exemples

Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$ (en justifiant clairement), et en déduire la nature de la suite $(S_n)_n$ à l'aide les parties précédentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \operatorname{th}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+1}\right)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^{-\sqrt{2}\sin(\pi/4+1/n)}$