L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Durée : 2 heures.

Le devoir comporte 5 exercices.

Exercice 1

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E .

On considère les deux ensembles X et Y suivants :

$$X = A \cup (B \cap C)$$

$$Y = (A \cup B) \cap C$$

1. Montrer que l'un des deux ensembles X et Y contient l'autre.
2. Montrer que $X = Y$ si et seulement si $A \subset C$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
- (b) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- (c) En déduire qu'il existe un réel α (à préciser) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leq \alpha$.
- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq 2e$.
2. On souhaite améliorer la majoration de la question 1.(c).
- (a) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 2$, on a :

$$1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

- (b) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Simplifier par télescopage l'expression

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

(on devra obtenir une expression simple en fonction de n).

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq 4$

Exercice 3

Résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

d'inconnue x réelle.

Exercice 4

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq i$ et $z \neq -i$, on définit :

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

On pose $z = e^{i\theta}$.

1. Montrer que $f(z) = \frac{1}{2 \cos(\theta)}$.
2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n f(z)^k$$

- (a) Déterminer les réels θ de $[-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ tels que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.
- (b) Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| > \frac{1}{2}$ d'inconnue x réelle.
- (c) Simplifier l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$, en distinguant deux cas suivant les valeurs de θ .
- (d) Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle? Démontrez.

Exercice 5

On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{\ln(x+e)}{x+e}$$

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Préciser la limite de f en $+\infty$.
3. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, encadrer u_n en utilisant la question 1.
 - (b) Montrer que u converge et calculer sa limite.
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = (\ln(x+e))^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I(n) = \int_0^n f(x) dx$$

- (a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x)$.

- (b) Calculer $I(n)$ en fonction de n .
5. Soit S la suite de terme général S_n tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

- (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, S_n en fonction de n . (Utiliser la relation de Chasles).
- (b) La suite S est-elle convergente ?