MPSI 15/16 **DS 2** 26 septembre 2015

DS 2

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Durée : 2 heures.

Le devoir comporte 3 exercices.

Exercice 1

Soit $(a, b, c, m) \in \mathbb{R}^4$.
Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

1. Justifier que le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer si et seulement si $m \notin \{0, 2\}$.
2. Résoudre $(\mathcal{S})$ lorsqu'il est de Cramer.
3. Résoudre $(\mathcal{S})$ lorsqu'il n'est pas de Cramer, suivant les valeurs des paramètres a, b et c.

Exercice 2

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit le nombre complexe $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

1. Soit $u \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $f(z) = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
2. Soit $u = X + iY$, avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, et soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(z) = u$.
   (a) Montrer que
   $$x = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{(X-1)^2 + Y^2}$$
   et
   $$y = \frac{-2Y}{(X-1)^2 + Y^2}$$
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur X et Y pour que : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$
3. On note P l'ensemble des nombres complexes z tels que $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$, et on note G l'ensemble :
   $$G = \{f(z) \,;\, z \in P\}$$
   On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. À l'aide des questions précédentes, représenter sur une figure les points d'affixe décrivant G.

Exercice 3

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Pour tout nombre complexe u de module 1, on définit les nombres complexes suivants :

$$A(u) = (1+u)^n + (1+\bar{u})^n$$

et

$$B(u) = (1+u)^n - (1+\bar{u})^n$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   Montrer que :
$$(1+e^{i\theta})^n = 2^n \left(\cos(\frac{\theta}{2})\right)^n e^{in\theta/2}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

   (a) Développer $(1+u)^n$ et $(1+\bar{u})^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

   (b) En déduire l'expression de $A(e^{i\theta})$ et $B(e^{i\theta})$ comme une somme.

   (c) Grâce à la question 1, en déduire les égalités suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \left(\cos(\frac{\theta}{2})\right)^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$
   et
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \left(\cos(\frac{\theta}{2})\right)^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

3. Dans cette question, on applique les égalités du 2.(c) dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$.

   (a) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

   (b) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ suivant les valeurs de k.

   (c) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

   (d) Déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ suivant les valeurs de n.

   (e) En déduire que si n est un multiple de 4, on a :
$$\sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \binom{n}{2p} = (-1)^{n/4} (\sqrt{2})^n$$
   et
$$\sum_{p=0}^{(n-2)/2} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = 0$$