

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Durée : 2 heures.

Le devoir comporte 3 exercices.

Exercice 1

Résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \quad z^2 - 2z - (7 + 6i) = 0$$

Exercice 2

On note (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(1 + z)^5 = (1 - z)^5$$

On donne : $\sqrt{5} \simeq 2,236$.

1. En développant grâce à la formule du binôme de Newton, résoudre (E) .
2. (a) Donner les racines 5^{èmes} de l'unité, en prenant soin d'indiquer celles qui sont conjuguées deux à deux.
(b) Résoudre l'équation $\frac{1+z}{1-z} = 1$ d'inconnue z complexe.
(c) Soit θ un réel. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $e^{i\theta} \notin \{-1, 1\}$.
(d) Soit θ un réel tel que $e^{i\theta} \notin \{-1, 1\}$. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue z complexe, et exprimer les solutions sous forme imaginaire pure :

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{i\theta}$$

- (e) Dédire des questions précédentes les solutions de (E) grâce à une autre méthode que celle utilisée à la question 1.
3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Pour $z \neq -4i$ un nombre complexe, on définit :

$$f(z) = \frac{z - 2i}{iz - 4}$$

Soit A le point d'affixe $-4i$, et B le point d'affixe $2i$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle-unité, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit $\mathcal{F}$ l'application de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point $\mathcal{F}(M)$ d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-4i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
2. Soit z un complexe tel que $z \neq -4i$. On note $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.
3. Déterminer l'ensemble $\widehat{f}^{-1}(i\mathbb{R})$.
4. Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $z \in \widehat{f}^{-1}(\mathbb{R})$.
5. Soit I le milieu du segment $[AB]$. On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire le cercle de centre I et de rayon BI .
 - (a) Soit M un point de $\mathcal{P}$.
Démontrer l'équivalence : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si $M \in \Gamma$.
 - (b) En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})} = \frac{\pi}{2} [\pi]$.
 - (c) Donner l'affixe du point I et le rayon de Γ .
 - (d) Retrouver le résultat de la question 5.(b) grâce au résultat de la question 4.
6. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $z \in \widehat{f}^{-1}(\mathbb{U})$.
(b) En déduire que l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\mathcal{F}(M) \in \mathcal{C}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.