L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Durée : 4 heures.

Le devoir comporte 5 exercices.

Exercice 1

Soit f l'application :

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \tan^2 t$$

On considère les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, \quad g(x) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right)$$

et

$$\forall x \in \mathcal{D}_h, \quad h(x) = \arctan(\sqrt{x})$$

où $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$ désignent les ensembles de définition respectifs des fonctions g et h .

1. Déterminer $\mathcal{D}_g$. Justifier.
2. Déterminer $\mathcal{D}_h$. Justifier.
3. Étudier les variations de f .
4. Déterminer les asymptotes éventuelles de la courbe représentative de f .
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
6. Montrer que pour $x \geq 0$, il existe un unique $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = f(t)$.
Exprimer alors t en fonction de x .
7. Montrer que pour $x \geq 0$, il existe un unique $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ tel que $x = f(t)$.
Exprimer alors t en fonction de x .
8. On considère $x \geq 0$ et l'unique élément t de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = f(t)$. Exprimer $g(x)$ en fonction de t .
9. En déduire que g et h sont égales.
10. Étudier les variations de h .
11. Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de h .
12. Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.
13. Déterminer $g'(x)$ pour $x > 0$. Que remarque-t-on ?
14. En déduire un résultat déjà montré dans l'une des questions précédentes.

Exercice 2

Soit x un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2^k} \right)$$

1. Démontrer que pour tout réel t , on a :

$$\operatorname{sh}(2t) = 2 \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut u_n si $x = 0$?
 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \neq 0$,

$$u_n = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2^n} \right)}$$

4. On suppose que $x \neq 0$.

(a) Que vaut $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t}$?

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{x}{2^n} \right)}{\frac{x}{2^n}}$.

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit t un réel non nul, fixé. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit le nombre complexe $u_p(t)$ suivant :

$$u_p(t) = 1 + i \frac{t}{p}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer le module $|u_p(t)|$ de $u_p(t)$.
 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.
 3. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} p \ln(|u_p(t)|)$.
 4. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} |u_p(t)|^p$.
 5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$z_p(t) = \frac{u_p(t)}{|u_p(t)|}$$

Montrer qu'il existe $\theta_p \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $z_p(t) = \cos(\theta_p) + i \sin(\theta_p)$, et calculer alors $\tan(\theta_p)$.

6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$.
 7. En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} p \theta_p = t$.
 8. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\cos(p \theta_p) + i \sin(p \theta_p))$.
 9. En déduire finalement la limite suivante :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(u_p(t))^p - (u_p(-t))^p}{2i}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I , par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \arccos(x) - \arcsin(2x)$$

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer le domaine de définition I de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ sont verticales.
6. Tracer $\mathcal{C}$.
7. Montrer que f induit une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
8. Justifier que l'équation (E) : $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in I$, admet une unique solution.
9. Justifier que l'unique solution a de l'équation (E) vérifie : $a \geq 0$.
10. Simplifier l'expression de $\sin(\arccos(x))$ lorsque celle-ci est définie.
11. Déterminer l'unique solution a de l'équation (E).
12. Déterminer l'ensemble $\hat{f}^{-1}(\{2\pi\})$.

Exercice 5

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer $f'(x)$ pour $x > 0$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Étudier les variations de f .
4. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x)$.
 (b) Donner $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}$.
 (c) f est-elle dérivable en 0 ?
 (d) Préciser la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer $\mathcal{C}$. (On donne $e^2 \simeq 7,389$ et $e^{2/e} \simeq 2,087$).
6. Cette question est indépendante des questions précédentes.
 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$