# Programme colles 10 : semaine du 4/01 au 08/01

**MPSI** **2015/2016**

**Suites réelles et complexes**
Programme de la semaine 9

**Limites et continuité, $1^{\text{ère}}$ partie**

Voisinages, définition de point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à une partie de $\mathbb{R}$, intérieur d'un intervalle, exemples.
Définition de limite finie et infinie d'une application. Limites à droite et à gauche en un réel $a$, lien avec la limite en $a$.
Unicité de la limite. Composition d'une limite de fonction et d'une limite de suite.
Unicité de la limite. Propriétés de la limite. Opérations sur les limites. Composition de limites.

**Démonstrations à connaitre :**

**Théorème 0.0.1** *Soit $f \in \mathbb{R}^I$, et $x_0$ adhérent à $I$.*
*Si $f$ admet une limite $l$ ($l \in \mathbb{R}$) en $x_0$, alors elle est unique, et on note alors :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = l$$

**Théorème 0.0.2** *Soit $I$ un intervalle, et $a \in \mathring{I}$.*

*1) Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Alors :*

$$\lim_{a} f = l \iff \lim_{a^+} f = l \quad \text{et} \quad \lim_{a^-} f = l \quad \text{et} \quad \boxed{l=f(a)}$$

*2) Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une application. Soit $L \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\lim_{a} f = L \iff \lim_{a^+} f = L \quad \text{et} \quad \lim_{a^-} f = L$$

**Théorème 0.0.3** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$, adhérent à $I$, et $L \in \bar{\mathbb{R}}$.*
*Si $\lim_a f = L$, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans $I$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, on aura $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.*