Programme colles 21 : semaine du 18/04 au 22/04

MPSI **2015/2016**

Espaces vectoriels

Programme de la semaine 20.

Intégrale sur un segment 1$^{\text{ère}}$ partie

Intégrales sur un segment des applications en escalier, propriétés.
Approximation des applications continues par morceaux sur un segment par des applications en escalier. Définition de l'intégrale d'une application continue par morceaux. Propriétés.

Sommes de Riemann gauches et droites :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}), \quad S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Limite des sommes de Riemann : les suites $(R_n(f))_n$ et $(S_n(f))_n$ convergent vers $\int_a^b f$ pour f continue par morceaux.

Démonstrations à connaître

Théorème 0.0.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue.
On suppose $f \geqslant 0$. Si $\int\limits_a^b f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème 0.0.2 ***Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier***
Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, continue. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad \text{et} \quad \psi(x) - \phi(x) \leq \varepsilon$$

Proposition 0.0.3 *Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On pose $M_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$. Soit, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - S_n(f) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Changements au colloscope cette semaine

- le groupe 6 aura colle le jeudi 21/04 à 18h15 (M. Pieddeloup)